Métodos Matemáticos da Física — 2017/18

Teste 3 — 01-06-2018

1.a) Represente graficamente a função $f(x) = x\,\Theta(2-x) + (x^2-3)\,\Theta(x-2)$.
b) Obtenha a expressão de $g(x) = f'(x)$.
c) Calcule o integral $\int_1^3 g(x)\,dx$ usando a expressão de $g(x)$ obtida na alínea anterior. Verifique se o resultado obtido é o resultado esperado tendo em conta a relação com a função $f(x)$.

2.a) Calcule as transformadas de Fourier das funções:

$$f(x) = e^{-a\,|x|}\;, \qquad g(x) = \delta(x)\,.$$

b) Aplique convenientemente o teorema de Parseval às funções $f(x)$, $g(x)$, para determinar os integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\,dy\;, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy\,.$$

3. Considere a equação de onda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,.$$

a) Escreva a função $u(t,x)$ em termos da sua transformada de Fourier $\tilde{u}(t,k)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(t,k)$.
b) Determine a solução geral $\tilde{u}(t,k)$, e a solução geral da equação de onda, $u(t,x)$, em termos de funções periódicas em x e em t.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\,k\,x}\,dx\;, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\,e^{i\,k\,x}\,dk\;,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,x} dk = 2\pi\,\delta(x)\;, \qquad 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\,\tilde{g}(k)\,dk$$